

# Anwendung der 13-Momenten-Näherung auf das Problem der Run-Away-Elektronen

FRIEDRICH HERTWECK

Institut für Plasmaphysik GmbH., Garching bei München

(Z. Naturforschg. 20 a, 1259—1261 [1965]; eingegangen am 6. Mai 1965)

The non-linear 13 moment approximation is applied to the problem of run-away-electrons. The solution is compared with the results obtained by DREICER.

In einer voranstehenden Arbeit<sup>1</sup> (im folgenden mit I bezeichnet) wurden die allgemeinen 13-Momenten-Gleichungen für ein Plasma abgeleitet. Wir wollen jetzt den speziellen Fall betrachten, daß sich ein homogenes Plasma unter dem Einfluß eines konstanten elektrischen Feldes befindet. Dieses Feld soll so groß sein, daß die bekannte lineare Näherung der Momentengleichungen nicht mehr gültig ist, d. h. insbesondere, daß die von SPITZER angegebene Leitfähigkeitsformel nicht mehr richtig ist. Während einer Stoßzeit wächst die thermische Energie der Elektronen so stark an, daß die daraus resultierende Verkleinerung der Reibungskraft gegen die Ionenkomponente ein weiteres Anwachsen des Kernes zur Folge hat. Es gibt dann keinen stationären Zustand mehr, sondern es treten die sogen. „Run-away“-Elektronen auf: Wenn ein Elektron im elektrischen Feld mehr Impuls (in Feldrichtung) gewinnt, als es im Mittel durch Stöße mit den Ionen verliert, kann es sehr schnell große Geschwindigkeiten (verglichen mit der thermischen Geschwindigkeit) erreichen. Das ist möglich, weil die Reibungskraft, die die Ionen auf die Elektronen ausüben, bei großen Relativgeschwindigkeiten umgekehrt proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit ist.

Das Problem der Run-away-Elektronen wurde zuerst von DREICER<sup>2</sup> untersucht. Er ging dabei auf zweierlei Weise vor: Näherungsweise beschrieb er die Elektronen-Geschwindigkeitsverteilung durch eine „verschobene MAXWELL-Verteilung“

$$f_e(\mathbf{u}) \cong \exp[-m_e(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D)^2 / (2kT_e)]. \quad (1)$$

Dieser Ansatz entspricht einer 5-Momenten-Näherung (Dichte  $\varrho$ , isotroper Druck  $p$ , mittlere Geschwindigkeit

keit  $\mathbf{u}_D$ ). In der Schreibweise von I lautet die Differentialgleichung für diese Driftgeschwindigkeit

$$\frac{\partial d_a}{\partial t} = \varepsilon_a - \frac{1}{\varrho_e} \mathfrak{S}_\alpha^{(e)}(\mathbf{d}, p). \quad (2)$$

Im Stoßmoment  $\mathfrak{S}_\alpha^{(e)}$  ist der Druck isotrop und  $q_a = 0$  zu setzen. Der Druck (bzw. die Temperatur) der Elektronen ergibt sich aus Gl. (6.1)

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = d_a \mathfrak{S}_\alpha^{(e)}(\mathbf{d}, p). \quad (3)$$

Dieses System von Differentialgleichungen ist von DREICER für eine Reihe von  $\varepsilon$ -Werten numerisch gelöst worden.

Der zweite Weg, den DREICER beschritt, war die numerische Lösung der FOKKER-PLANCK-Gleichung, mit deren Ergebnis man diese Näherungsmethoden vergleichen kann.

Es ist klar, daß die Methode der „verschobenen MAXWELL-Verteilung“ nur ungenaue Ergebnisse liefern kann, da es bei den Stromleitungsphänomenen wesentlich auf die dritten Momente der Verteilungsfunktion ankommt. Die Momentengleichungen lauten für ein homogenes Plasma und konstantes elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial t} &= \varepsilon_1 - \frac{1}{\varrho_e} \mathfrak{S}_\alpha^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}), \\ \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} &= \mathfrak{S}_{11}^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}), \\ \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} &= \mathfrak{S}_{22}^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}), \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} &= \mathfrak{S}_1^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}); \end{aligned} \quad (4)$$

$d_1$  und  $s_1$  sind Diffusions- und Wärmestrom in Richtung des elektrischen Feldes. Wegen der Symmetrie des Problems kann der Drucktensor nur die beiden

<sup>1</sup> F. HERTWECK, Z. Naturforschg. 20 a, 1243 [1965].

<sup>2</sup> H. DREICER, II. UN Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneve 1958.



Komponenten parallel und senkrecht zum elektrischen Feld haben, also

$$p_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Wir wollen hier nicht die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems (4) explizit angeben, man erhält sie leicht aus den in I hergeleiteten Formeln. Die rechten Seiten enthalten die in Abschnitt I.4 und I.5 definierten Integrale (insgesamt 14 verschiedene) und gelten für beliebige Werte von  $d$ ,  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$ . Nur  $s$  muß klein sein, d. h.

$$s \ll \frac{5}{2} p \sqrt{p/q_e}.$$

Als Maßeinheit der elektrischen Feldstärke

$$\varepsilon_1 [ = (e/m_e) E_1 ]$$

wählen wir die von DREICER benutzte „kritische Feldstärke“

$$\varepsilon_c = 2\pi \frac{e^4}{m_e} \left( \frac{q_e}{p} \right)^2 \ln A_0 \text{ [cm sec}^{-2} \text{]}. \quad (6)$$

Der Index Null bedeutet, daß die Anfangswerte zu nehmen sind. Die Bedeutung dieser kritischen Feldstärke  $\varepsilon_c$  ergibt sich leicht aus dem Verlauf der Funktion  $\mathfrak{E}_1^{(e)}(d, s; p_{\parallel}, p_{\perp})$  für  $s=0$  und  $p_{\parallel} = p_{\perp} = \text{const}$  (Abb. 1). Für  $\varepsilon/\varepsilon_c > 0,427$  ist bei beliebigem  $d$  die elektrische Kraft  $m_e \varepsilon$  größer als die Bremskraft  $\mathfrak{E}_1^{(e)}/n$ .

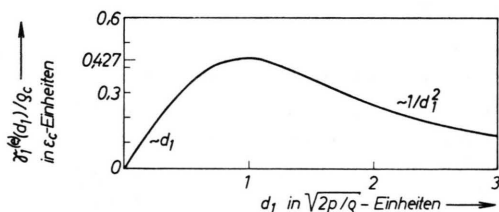


Abb. 1. Die Bremskraft als Funktion der Relativgeschwindigkeit.

Wir geben jetzt die numerischen Lösungen für zwei Parameter an; sie sind in den Abb. 2 und 3 dargestellt.

Für den Parameter-Wert  $\varepsilon/\varepsilon_c = 0,1$  hat DREICER eine numerische Lösung der FOKKER-PLANCK-Gleichung Gl. (I.2.1) angegeben (für  $\tau=0$  bis  $\tau=6$ ). Man erhält eine gute Übereinstimmung in der Temperatur, während die Kurven für den Strom größere Abweichungen zeigen. Nun sind aber bei DREICER Teilchen- und Energieerhaltung wegen der Ungenauigkeit des Rechenverfahrens nicht genau erfüllt: Die Teilchenzahl wächst zwischen  $\tau=0$  und

$\tau=3$  um 30% und bleibt dann konstant. Die Energiebilanz zeigt zeitweise Abweichungen von 15% vom Sollwert. Ein fälschlich zu großer Strom würde das Vorzeichen der Abweichung in der Energiebilanz erklären. Möglicherweise ist also die Übereinstimmung besser, als es hier den Anschein hat. Qualitativ ergibt sich eine gute Übereinstimmung in der Druckanisotropie (Abb. 3 c), insbesondere scheinen beide Kurven gleichzeitig ihr Maximum zu erreichen. Aus den von DREICER angegebenen Höhenliniendiagrammen seiner Lösung sieht man, daß die Asymmetrie der Verteilungsfunktion zwischen  $\tau=3$  und  $\tau=5$  am größten ist und bei  $\tau=6$  wieder abnimmt. Das ist mit der Kurve für  $a_1$  in Abb. 3 b vereinbar.

Zusammenfassend kann man sagen, daß sich die wesentlichen Züge der zeitlichen Entwicklung der Elektronenverteilungsfunktion durch die 13-Momenten-Näherung wiedergeben lassen. Der Zeitaufwand für die Lösung der Momentengleichungen, die hier

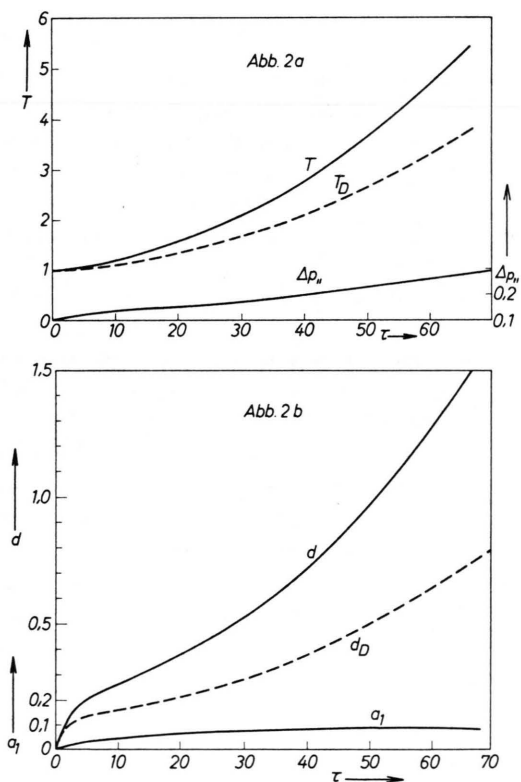
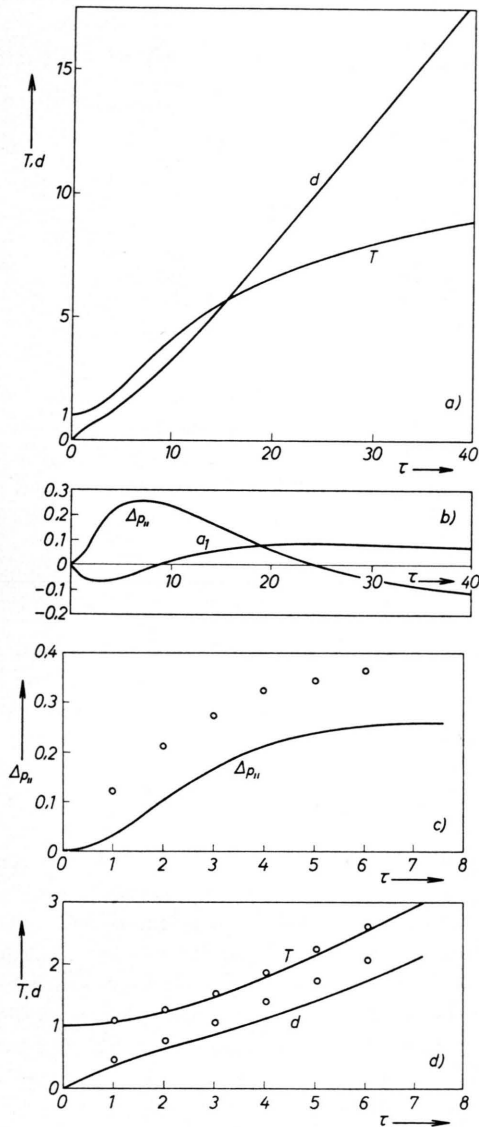


Abb. 2. Die Lösung für  $\varepsilon/\varepsilon_c = 0,1$ . Die Zeiteinheit der Abszisse ist  $\tau = (2p/q_e) \theta^{1/2} / \varepsilon_c \approx$  mittlere Stoßzeit. Die gestrichelten Kurven sind Lösungen von DREICER. Die Temperaturen sind in Einheiten der Anfangstemperatur aufgetragen, die Diffusionsgeschwindigkeit  $d$  in Einheiten von  $(2p/q_e) \theta^{1/2}$ . Der Entwicklungskoeffizient  $a_1 = q/\sqrt{2p/q_e}$  aus Gl. (I.3.8) bleibt dauernd  $< 0,09$ ;  $\Delta p_{\parallel} = p_{\parallel}/p - 1$ .



gewöhnliche Differentialgleichungen sind, ist erheblich kleiner als für die Lösung der partiellen Differentialgleichung. (Mit den von DREICER angegebenen Daten folgt ein Faktor  $> 5000$ .)

Die Anwendbarkeit dieser Momentengleichungen ist auf Fälle beschränkt, in denen der Entwicklungskoeffizient  $a_i$  in Gl. (I.3.8) nicht zu groß ist (das Quadrat war vernachlässigt worden); ferner sollen die Koeffizienten höherer Ordnung vernachlässigbar sein. Die erste Voraussetzung läßt sich an Hand der Lösungen leicht überprüfen (in den beiden gerechneten Beispielen ist sie mit hinreichender Genauigkeit erfüllt).

Keinen Einschränkungen unterworfen sind die Größe der Diffusionsgeschwindigkeit  $d$ , gemessen an der thermischen Geschwindigkeit  $\sqrt{p/q_e}$  und die Anisotropie  $(p_{a\beta} - p \delta_{a\beta})/p$  des Drucktensors. Wenn diese Größen klein sind, gehen die hier abgeleiteten Momentengleichungen über in die lineare Näherung von KOLODNER.

Abb. 3. Die Lösung für  $\epsilon/\epsilon_0 = 0.5$ . Die Lösung von DREICER Kurven in Abb. 3 a. Auch hier bleibt dauernd  $a_1 < 0.09$ . — für  $d$  und  $T$  deckt sich bis auf Zeichengenauigkeit mit den Abb. 3 b:  $a_1 = q/\sqrt{2} p/q_e$ ,  $\Delta p_{||} = p_{||}/p - 1$ .  $\circ \circ \circ$  Werte von DREICER.